

UNIVERSITE HASSAN II - MOHAMMEDIA

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES



TP3:Moment d'inertie et vibrations de torsions



réaliser par :

+

I .But du TP :

-Détermination du couple de rappel d'un ressort spiral.

-Détermination du moment d'inertie

- d'un disque, d'un cylindre, d'une sphère et d'une barre
- de deux points matériels en fonction de la distance verticale à l'axe de rotation.

Le centre de Gravité se trouve sur l'axe de rotation.

II. PRINCIPE :

Différents corps exécutant autour de leur axe de centre de gravité des mouvements oscillants de torsion. On mesure la durée des oscillants ce qui permet la détermination du moment d'inertie.

III. MONTAGE ET MODE OPERATOIRE :

Pour la détermination du couple de rappel, on serre la barre dans l'axe de torsion et on fixe les deux masses symétriquement à une distance déterminée de l'axe de torsion. On tourne à l'aide d'un dynamomètre la barre de 180° autour de l'axe de rotation en mesurant la force nécessaire. Le bras de levier et le dynamomètre forment dans ce cas un angle droit. Pour la mesure de la durée de l'oscillation des différents corps, on met en place un écran fixé par collage. La barrière lumineuse est, le corps étant en position de repos, placée par-dessus l'écran. On shunte sur le compteur à 4 décades les douilles Start et stop (jaune-jaune). On ne mesure chaque fois que la demi -durée d'une période en prenant la moyenne des oscillations à gauche et à droite.

IV. Théorie et exploitation :

Le théorème du moment cinétique permet d'avoir la relation entre le moment cinétique L et le moment du couple T d'un corps rigide dans un système de coordonnées au repos ayant son origine au centre de gravité qui se met sous la forme :

$$T=dL/dt$$

Le moment cinétique s'exprime à partir de la vitesse angulaire ω et du tenseur d'inertie $\bar{I}$:

$$L= \bar{I}*\omega$$

Dans notre cas, ω est dirigé suivant l'axe d'inertie principal (axe des z) de sorte que L ne possède qu'une composante :

$$L_z = \bar{I}_z * \omega$$

I_z étant la composante suivant l'axe des z du tenseur d'inertie principal du disque.
L'équation s'exprime dans ce cas :

$$T_z = I_z\ (d\omega/dt) = I_z\ (d2\Phi/d2t)$$

Le moment du couple d'un ressort spiral s'exprime dans la plage de Hooke par :

$$T_z = -D.\Phi$$

(D étant la constante de rotation)

V. Manipulation :

- ***Matériels*** **:**

1) Un Trépied -passe-
2) Une embase -passe-
3) Un axe de rotation
4) Une sphère de R= 70mm et m=716g
5) Un disque de R=108mm et m=248g
6) Un cylindre plein de R=49 ,5mm et m=367g
7) Un cylindre creux de R_1=46mm et m=372g et R_2=50mm
8) Une barre avec masses mobiles m_1=m_2=133g
9) Une mesure 2m
10) Une barrière optique a fourche
11) Un compteur digital a 4 décades
12) Quatre fils de connexion

♣ *Tableau du moment du couple du ressort en fonction de l'angle de torsion :*

ϕ	π/2 = 90°			π = 180°			3π/2 = 270°			2π = 360°		
F(N)	0,1	0,11	0,09	0,24	0,26	0,25	0,41	0,39	0,4	0,56	0,57	0,55
Fmoy(N)	0,1			0,25			0,4			0,56		
Tz = F.d (N.m)	0,02			0,05			0,08			0,112		
$\Delta Tz \times 10^{-3}$ (N.m)	2,1			2,25			2,4			2,56		
Δϕ	π/36 = 5°			π/36 = 5°			π/36 = 5°			π/36 = 5°		

Soient : Φ : l'angle de torsion

F : la force mesuré par le dynamomètre

On sait que : Tz = F.d

Donc : $Tz = F.d \Rightarrow \log(Tz) = \log(F) + \log(d) \Rightarrow d(Tz)/Tz = d(F)/F + d(d)/d$

$\Rightarrow \Delta Tz = Tz\,[\Delta F/F + \Delta d/d]$

Avec :

$\Delta F = 0{,}01$ N.m , $\Delta d = 0{,}001$ m

Et : d = 20 cm = 0,20 m

♣ La courbe correspondante représente le moment du couple du ressort en fonction de l'angle de torsion :

♣*Calculons la constante D de torsion* :

On sait que $D = (P_{max} + P_{min})/2$

Avec :

$P_{min} = (T3 - T1) / (\Phi3 - \Phi1)=(0,08-0,02)/(3\pi/2-\pi/2) =0,0191$N.m/rad

Et :

$P_{max} = (T4 - T1) / (\Phi4 - \Phi1)=(0,112-0,05)/(2\pi-\pi) =0,0197$ N.m/rad

Donc :

D = 0,0194N.m/rad

Et :

$\Delta D = (P_{max} - P_{min})/2 =2,15*10^{-3}$N.m/rad

Et par suite, on conclut que :

$D = (0,0194\pm 3*10^{-4})$ N.m/rad

♣ Equation du mouvement :

D'après le théorème du moment cinétique, on a :

$$T = dL/dt \Rightarrow Tz = dLz/dt \quad \text{avec } Lz = Iz.\omega$$

$$\Rightarrow Tz = Iz.d\omega/dt \text{ et } \omega = d\Phi/dt \Rightarrow Tz = Iz.d^2\Phi/d^2t$$

Et on sait que : $Tz = -D\Phi \Rightarrow Iz.d^2\Phi/d^2t = -D\Phi$

Donc, l'équation du mouvement est : **$d^2\phi/d^2t + D\phi/Iz = 0$**

La fréquence d'oscillation :

On a :

$d^2\Phi/d^2t + \omega^2\Phi = 0 \Rightarrow \omega^2 = D/Iz$

Donc :

$\omega = (D/Iz)^{1/2}$ et puisque $\omega = 2\pi f$

Donc la fréquence est :

$f = (1/2\pi)(D/Iz)^{1/2}$

♣Moment d'inertie des corps suivants : Disque, cylindre plein, sphère et barre.

On sait que :

$$\omega^2 = D/Iz \quad \text{et} \quad \omega = 2\pi/T$$

$$\Rightarrow \text{donc } 4\pi^2/T^2 = D/Iz \quad \Rightarrow \quad Iz = DT^2/4\pi^2$$

En calculant T des corps précédents, on trouve les résultats suivants :

	disque	Cylindre pleine	sphère	Cylindre vide
T1(ms)	1519,4	730,2	1531,4	1150,4
T2(ms)	1503,0	707,4	1523,8	1148,2
T3(ms)	1494,0	707,4	1518,6	1159,4
Tmoy (ms)	1505,4	715,0	1524,6	1152,6
Iz	$1,2.10^{-4}$	$5,094.10^{-4}$	$1,680.10^{-3}$	$8,1.10^{-4}$

♣Moment d'inertie de deux masses m1 et m2 :

On cherche le moment d'inertie de deux masses m1 et m2 en fonction du carré de leurs distances :

On sait que : $\log(d^2) = 2\log(d) \Rightarrow d(d^2)/d = d(d)/d \Rightarrow \Delta(d^2) = 2d.\Delta d$

Et on a aussi : $Iz = DT^2/4\pi^2$ donc $d(Iz)/Iz = d(D/4\pi^2)/(D/4\pi) + 2d(T)/T$

Donc :

$$\Delta(Iz) = Iz\,(2\Delta T/T + \Delta D/D) \text{ avec } \Delta T = 0{,}001 \text{ et } \Delta D = 3*10^{-4}\,N.m/rad$$

d(cm)	5	10	15	20
$d^2(cm^2)$	25	100	225	400
T1 (s)	3,22	4,12	5,58	7,8
T2 (s)	3,1	4,1	4,94	7,22
T3 (s)	3,3	4,22	4,74	7,12
T4 (s)	3,26	4,2	4,86	7,2
Texp (s)	3,22	4,16	5,02	7,34
Iz	$5{,}09.10^{-3}$	$8{,}50.10^{-3}$	$12{,}3.10^{-3}$	$26{,}5.10^{-3}$
Δ(Iz)	$8{,}19.10^{-5}$	$13{,}55.10^{-5}$	$19{,}51.10^{-5}$	$41{,}70.10^{-5}$

♣ *La courbe correspondante représente le moment d'inertie des 2 masses en fonction du carré de leur distance :*

IV. Conclusion :

-D'après ce TP on constate premièrement une coordination entre le moment d'inertie théorique et pratique.

-Et on constate aussi que la période de l'oscillation ne dépend pas de l'angle de rotation Φ.